

بسم الله الرحمن الرحيم
اللهم صل على محمد و آل محمد



www.egza.tk

* استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

۱. اصل کمال در کدامیک از مجموعه‌های زیر صادق است؟

- الف. Q و (اعداد گویا) ب. اعداد اصم ج. $Q_n(-\infty, \sqrt{2})$ د. اعداد حقیقی

۲. کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟

- الف. هر زیرمجموعه ناتهی و کراندار از اعداد حقیقی دارای اینقیسم و سوپریم است.
ب. هر زیرمجموعه ناتهی و از پایین کراندار از اعداد حقیقی دارای اینقیسم است.
ج. هر زیرمجموعه ناتهی و از بالا کراندار از اعداد گویا دارای سوپریم است.
د. بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گویا موجود است.

۳. اگر $E = \cup_{n=1}^{\infty} [\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}]$ کدامیک از عبارات زیر درست است؟

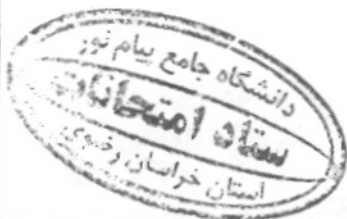
- الف. $\sup E = 3$ $\inf E = 1$ ب. $\sup E = 4$ $\inf E = \frac{1}{2}$
ج. $\sup E = 4$ $\inf E = 0$ د. $\sup E = 3$ $\inf E = \frac{1}{2}$

۴. کدامیک از مجموعه‌های زیر کراندار نیست؟

- الف. $E = \left\{ \frac{x}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ ب. $E = \left\{ \frac{x}{1+|x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$
ج. $E = \{e^x \sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$ د. $E = \{e^{-x^2} \cos x \mid x \in \mathbb{R}\}$

۵. کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟

- الف. هرگاه A از پائین کراندار و $\emptyset \neq B \subseteq A$ آنگاه $\inf A \leq \inf B$
ب. هرگاه A از بالا کراندار و $\emptyset \neq B \subseteq A$ آنگاه $\sup A < \sup B$
ج. هرگاه $A \neq \emptyset$ و کراندار $A = \{cx \mid x \in A\}, c \in \mathbb{R}^+$ نیز کراندار است و $\inf B = c \inf A$
د. هرگاه $A \neq \emptyset$ و کراندار $A = \{cx \mid x \in A\}$ و $c \in \mathbb{R}^-$ آنگاه $\sup B = c \inf A$
۶. هرگاه $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد کدامیک از عبارات زیر درست است؟

الف. هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ موجود باشد آنگاه $\{a_n\}$ دارای حد است.ب. هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ موجود باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ موجود است.ج. هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ موجود است.د. هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ آنگاه $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 

نام درس: آنالیز ریاضی ۱

www.egza.tk

تعداد سوالات: فنی ۲۰ تکمیلی -- تفریحی ۶

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

زمان امتحان: تفسی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تفریحی ۶۰ دقیقه

کلاس: ۲۵۰۱۷۹

تعداد کل صفحات: ۲

۷. فرض کنید (X, d) فضای متریک گسسته باشد. کدامیک از عبارات زیر درست است؟الف. هرگاه $A \subseteq X$ نامتناهی باشد، آنگاه $A' \neq \emptyset$ ب. به ازای هر $A \subseteq X$ ، $A' \neq \emptyset$.ج. به ازای هر $A \subseteq X$ ، $A' \neq \emptyset$.د. هرگاه $A \subseteq X$ و $A' \neq \emptyset$ آنگاه A بسته است.۸. فرض کنید (M, d) یک فضای متریک است. کدامیک از گزینه‌های زیر نا درست است؟

الف. اجتماع دلخواه مجموعه‌های باز، باز است.

ب. اجتماع هر خانواده متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته است.

ج. اشتراک هر خانواده نامتناهی از مجموعه‌های باز، باز است.

د. اشتراک هر خانواده دلخواه از مجموعه‌های بسته، بسته است.

۹. فرض کنید (M, d) یک فضای متریک و $A \subseteq X$. کدامیک از عبارات زیر با سه تای دیگر معادل نیست؟الف. P نقطه انباشتی A است.ب. هر همسایگی P شامل تعداد نامتناهی نقطه در A است.ج. دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A وجود دارد که همواره $x_n \neq P$ ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = P$ د. دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در X موجود است که همواره $x_n \neq P$ ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = P$ ۱۰. فرض کنید (M, d) یک فضای متریک و $A \subseteq X$ کدامیک از عبارات زیر نا درست است؟الف. اگر A فشرده باشد آنگاه A بسته است.ب. اگر X فشرده باشد آنگاه A نیز فشرده است.ج. اگر X فشرده باشد \bar{A} نیز فشرده است.د. اگر A فشرده و $K \subseteq X$ آنگاه $A \cap \bar{K}$ فشرده است.۱۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $A \subset X$ در کدام صورت A در X بسته است؟الف. دنباله‌ای در A موجود باشد که همگرا به عضوی از $X - A$ گردد.ب. هر دنباله همگرا از اعضای A به عضوی از A همگرا باشد.ج. دنباله‌ای در $X - A$ موجود نباشد که به عضوی از A همگرا گردد.د. دنباله‌ای در A موجود باشد که به عضوی از A همگرا باشد.۱۲. فرض کنید (M, d) یک فضای متریک باشد کدامیک از گزاره‌های زیر با فشرده‌گی فضای M نماد مجموعه تهی معادل

نیست؟

الف. اگر هر خانواده \mathcal{F} از زیر مجموعه‌های بسته M دارای خاصیت اشتراک متناهی باشد آنگاه $F \in \mathcal{F} \cap F \neq \emptyset$ ب. هر خانواده \mathcal{F} از مجموعه‌های بسته با اشتراک تهی دارای یک زیر خانواده متناهی با اشتراک تهی می‌باشد.ج. هر زیرمجموعه نامتناهی E از M حداقل دارای یک نقطه انباشتی در M است.د. فضای M بسته و کراندار است.

نام درس: آنالیز ریاضی ۱

www.egza.tk

تعداد سؤالات: نسی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۶

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

زمان امتحان: تشریحی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۲۵۰۱۷۹

تعداد کل صفحات: ۲

۱۳. فرض کنید (M, d) یک فضای متریک کامل باشد. کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟الف. اگر $B \subseteq M$ هیچ جاکمال باشد، آنگاه $(\bar{B})^0 = \emptyset$ ب. $\bar{A} = M$ آنگاه A در M چکال است.ج. $A \subseteq M$ آنگاه \bar{A} کامل است.د. هر زیر مجموعه نامتناهی E از M دارای نقطه انباشتگی است.۱۴. اگر (X, d) یک فضای متریک و $E \subseteq X$ کدامی: از عبارات زیر نادرست است؟الف. E' بسته است. ب. $(E')' \subset E'$ ج. $(E')' = E'$ د. صفر تنها نقطه انباشتگی $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ است.۱۵. فرض کنید Y, X دو فضای متریک و $f: X \rightarrow Y$ تابعی دوسوئی و پیوسته باشد. کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟الف. هرگاه V مجموعه‌ای باز در X باشد آنگاه $f(V)$ در Y باز است.ب. هرگاه V یک مجموعه بسته در X باشد آنگاه $f(V)$ در Y بسته است.ج. اگر X فشرده باشد، آنگاه الف و ب هر دو درست است.د. اگر Y فشرده باشد آنگاه الف و ب هر دو درست است.۱۶. فرض کنید X, Y دو فضای متریک و $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد. کدامیک از عبارات زیر درست است؟الف. هرگاه $E \subseteq X$ فشرده باشد، آنگاه f بر E پیوسته یکنواخت است.ب. هرگاه $E \subseteq X$ بسته باشد، آنگاه f بر E پیوسته یکنواخت است.ج. هرگاه $E \subseteq X$ همبند باشد، آنگاه f بر E پیوسته یکنواخت است.د. هرگاه Y همبند باشد آنگاه f بر X پیوسته یکنواخت است.۱۷. فرض کنید Y, X دو فضای متریک و $f: X \rightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد. کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟الف. اگر $E \subseteq X$ همبند باشد، آنگاه $f(E)$ همبند است.ب. اگر $E \subseteq X$ فشرده باشد، آنگاه $f(E)$ فشرده است.ج. اگر $B \subseteq Y$ فشرده باشد، آنگاه $f^{-1}(B)$ فشرده است.د. X فشرده باشد و $B \subset Y$ بسته آنگاه $f^{-1}(B)$ فشرده است.۱۸. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای حقیقی باشد کدام عبارت درست است؟الف. دنباله $\{x_n\}$ همگراست اگر و تنها اگر کراندار باشد.ب. دنباله $\{x_n\}$ کوشی است اگر و تنها اگر همگرا باشد.ج. اگر $\{x_n\}$ کراندار باشد آنگاه همگرا است.د. هرگاه برد $\{x_n\}$ کراندار باشد آنگاه $\{x_n\}$ کوشی است.

نلم درجه: آنالیز ریاضی ۱

www.egza.tk

تعداد سؤال: نهمی ۲۰ تکلیلی - نظری ۶

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

زمان امتحان: تئوری و تکلیلی ۶۰ دقیقه نظری ۶۰ دقیقه

کل درجه: ۲۵۰۱۷۹

تعداد کل صفحات: ۲

۱۹. فرض کنید f بر (a, b) تعریف شده و نزولی باشد. کدامیک از عبارات زیر درست است؟الف. تعداد نقاط ناپیوستگی f لزوماً متناهی است. ب. f روی (a, b) لزوماً پیوسته است.ج. تعداد نقاط ناپیوستگی f لزوماً نامتناهی است. د. تعداد نقاط ناپیوستگی f متناهی یا شمارشپذیر است.۲۰. فرض کنید $E \subseteq R$ کدامیک از عبارات زیر درست است؟الف. هرگاه E کراندار باشد آنگاه $\sup E \in E$ ب. هرگاه E فشرده باشد آنگاه $\sup E \in E$ ج. هرگاه E بسته باشد آنگاه E کراندار و $\sup E \in E$ د. هرگاه E همبند و کراندار باشد آنگاه $\sup E \in E$

« سؤالات تشریحی »

از شش سؤال زیر به دلخواه به پنج سؤال پاسخ دهید.

۱. اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد به طوری که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{آنگاه ثابت کنید} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

۲. فرض کنید (M, d) یک فضای متریک و A زیر فضائی از آن باشد و $C \subseteq A$. آنگاه C در M فشرده است فقط و فقط وقتی که C در A فشرده باشد.۳. نقاطی که تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in Q \\ \cos x & x \notin Q \end{cases}$ در آن نقاط دارای حد است مشخص کنید.۴. فرض کنید $(X, d_X), (Y, d_Y)$ دو فضای متریک باشند. نشان دهید که تابع f از X به Y پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه باز $v \subseteq Y$ مجموعه $f^{-1}(v)$ باز باشد.۵. ثابت کنید $f: X \rightarrow Y$ پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر زیرمجموعه فشرده $C \subseteq X$ ، تحدید f بر C پیوسته باشد.۶. فرض کنید دو تابع حقیقی f, g بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر باشند. ثابت کنید نقطه‌ای چون $C \in (a, b)$ وجود دارد بطوریکه:

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

