

بسم الله الرحمن الرحيم
اللهم صل على محمد و آل محمد



www.egza.tk

تعداد سوالات: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵
 زمان امتحان: تشریحی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه
 تعداد کل صفحات: ۵

۱۴، ۱۰، ۸۶

نام درس: رگرسیون

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

(ساعت ۱،۵)

کد درس: ۲۵۰۲۱۸

www.egza.tk

«استفاده از ماشین حساب مجاز می باشد»

۱. در رگرسیون خطی ساده، با فرض مقادیر زیر برآورد σ^2 برابر است با:

$$n = 8 \quad S_y^2 = 7 \quad \hat{a} = \hat{b} = 1 \quad S_x^2 = 1 \quad S_{xy} = 3$$

الف. ۴۸ ب. ۸ ج. ۱۶ د. ۲۰

۲. با فرض اینکه $Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} - \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y}$ ، $\text{var}(Z)$ برابر است با:

الف. $r(1+\rho)$ ب. $r(1-\rho)$ ج. $(1-\rho)^2$ د. $r(1-\rho)^2$

۳. برای آزمون $\begin{cases} H_0: \rho = \rho_0 \\ H_1: \rho \neq \rho_0 \end{cases}$ تحت فرض نرمال دو متغیره بودن (X, Y) ، $n > 2$ ، کدام آماره را به کار می بریم.

الف. $\frac{R\sqrt{n-r}}{\sqrt{1-R^2}}$ ب. $\frac{(R-r)\sqrt{n}}{\sqrt{1+R^2}}$ ج. $\frac{R\sqrt{n+r}}{\sqrt{1+R^2}}$ د. $\frac{R\sqrt{n+r}}{\sqrt{1-R^2}}$

۴. فرض کنید رگرسیون Y روی X یک تابع خطی بصورت $d(x) = a + bx$ باشد در صورتیکه داشته باشیم

$\sigma_y^2 = 4$ ، $\rho = \frac{1}{2}$ مقدار $E(\text{var}(Y/X))$ برابر است با:

الف. ۴ ب. ۲ ج. ۳ د. هیچکدام

x	۲۵	۶۰	۷۵	۹۰	۹۵
y	۶/۲۵	۶/۵	۵/۱۵	۵/۲	۳/۱۵

۵. داده های جدول زیر را در نظر می گیریم

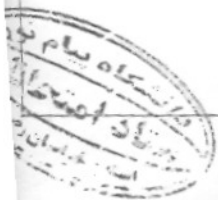
خط رگرسیون برابر است با:

الف. $\hat{y} = 8,5 + 0,05208x$ ب. $\hat{y} = 9,192 + 0,05208x$

ج. $\hat{y} = 9,192 + 0,01x$ د. $\hat{y} = 9,192 - 0,05208x$

۶. در سؤال ۵ با فرض اینکه $t_{0,95}(3) = 2,353$ ، حد بالای فاصله اطمینان نود درصدی برای b کدام است؟

الف. ۰/۱۰۴۲ ب. ۰/۰۰۲ ج. ۰/۰۰۰۲ د. ۰/۰۰۰۰۲



نام درس: رگرسیون

تعداد سوال: ۲۰ نسی تکمیلی - تفریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تفریحی ۶۰ دقیقه

www.egza.tk

کد درس: ۲۵۰۲۱۸

تعداد کل صفحات: ۵

۷. نزدیک بودن یافته کداج یک از عبارتهای زیر به یک، میان متغیرها یک رابطه خطی قوی برقرار می‌شود؟

الف. $\frac{SST}{SSR}$ ب. $\frac{SSE}{SST}$ ج. $\frac{SSR}{SST}$ د. $\frac{SSE}{SSR}$

۸. در یک مدل خطی ساده با فرض مقادیر زیر $\text{var}(ra + \hat{b})$ برابر است با:

$\bar{x} = 1, \sigma^2 = 1, \bar{y} = 2, S^2_x = 2, S^2_y = 4, n = 8$

الف. $\frac{3}{4}$ ب. $\frac{5}{16}$ ج. $\frac{30}{75}$ د. $\frac{64}{16}$

۹. گزینه نادرست کدام است؟

الف. $P^{-1} = P'$ ب. $P_1 P_2 \Rightarrow P_1 P_2$ قائم

ج. $P_1 P_2 \Rightarrow P_1 P_2$ قائم د. $Det P = \pm 1 \Rightarrow P$ قائم

۱۰. تصویر بردار $u = (1, 2, 3, 4)$ روی بردار $v = (1, 1, 1, 1)$ برابر است با:

الف. $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ ب. $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ ج. $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ د. $(5, 5, 5, 5)$

۱۱. با فرض اینکه A, B دو ماتریس همیشه مثبت $n \times n$ باشند کدام گزینه نادرست است؟

الف. وارون A یعنی A^{-1} وجود دارد و همیشه مثبت است.

ب. برای هر عدد طبیعی K ، ماتریس A^K همیشه مثبت است.

ج. حاصلضرب AB مقارن است.

د. برای هر دو عدد حقیقی مثبت a, b ، $aA + bB$ همیشه مقارن است.



نام درس: رگرسیون

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

www.egza.tk

کد پرسن: ۲۵۰۲۱۸

۱۷. در مدل خطی $Y = Xa + E$ ، $E(E) = 0$ ، $\sum E = \sigma^2 I$ ، با فرض $E \sim N(0, \sigma^2 I)$ ، $\sum \hat{\mu}_i$ برابر است با:

الف. $\sigma^2 X(X'X)^{-1}X'$ ب. $\sigma^2 (XX')^{-1}X$ ج. $\sigma^2 X(X'X)X'$ د. $\sigma^2 X(X'X)^{-1}X'$

۱۸. در مدل خطی سؤال ۱۷ تحت فرض خطی $H_0: Ma = 0$ برآورد پارامتر σ^2 برابر است با:

الف. $\frac{SST}{n - K + h}$ ب. $\frac{SST}{n - k}$ ج. $\frac{SSE}{n - k + h}$ د. هیچکدام

۱۹. فرض کنید $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ با فرض $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\sum BY$ برابر است با

الف. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ د. هیچکدام

۲۰. عبارت یک برآورد یاب خطی ناریب یکتا با کمترین واریانس برای منابع برآورد پذیری $C'a$ برابر است با $C'\hat{a}$

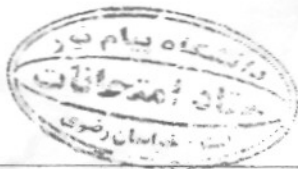
بیانگر کدام قضیه است.

الف. کاکران ب. مختصات قانونی ج. گاوس مارلف د. هیچکدام

«سـ والیات تشـ ریـحی»

۱. الف) ثابت کنید در یک مدل خطی ساده \hat{b} که با روش LS بدست می آید ناریب است.

ب) با فرض ناهمبسته بودن E_i ها، در آن مدل خطی ساده واریانس این برآورد میانگین و واریانس \hat{y}_i را بیابید.



تعداد سوال: فنی ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵
 زمان امتحان: تفسی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه
 تعداد کل صفحات: ۵

نام درس: رگرسیون

رشته تحصیلی: گرافیک - آمار

کد درس: ۲۵۰۲۱۸

www.egza.tk

۱۲. با فرض اینکه $\mu_{y_1} = \mu_{y_2} = \mu_{y_3} = 2$ ، $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 1$ و داریم

$\sigma_{23} = 0$ ، $\sigma_{12} = -1$ ، $\sigma_{13} = 1$ ماتریس کواریانس بردار تصادفی

$U = [u_1 = 2y_1 + y_2 + y_3 + 1 \quad u_2 = y_1 - y_2 - y_3 + 2]$ برابر است با:

الف. $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ د. هیچکدام

۱۳. برای بردار تصادفی (X_1, X_2, X_3) مقادیر زیر داریم

$\rho(X_1, X_2) = 0.1$ ، $\rho(X_1, X_3) = 0.2$ ، $\rho(X_2, X_3) = -0.1$

مقدار ρ_{13} برابر است:

الف. 0.21 ب. 0.30 ج. 0.17 د. 0.10

۱۴. همخطی در رگرسیون چه موقع ممکن است پدید آید:

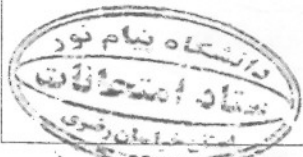
- الف. هرگاه سطرهای X مستقل نباشند
- ب. هرگاه ستونهای X مستقل باشد.
- ج. هرگاه سطرهای X مستقل باشند.
- د. هرگاه ستونهای X مستقل نباشند

۱۵. روش رگرسیون برآمده ستیفی به چه منظور بکار می‌رود؟

- الف. افزایش همخطی ب. کاهش همخطی
- ج. افزایش ضریب همبستگی د. کاهش ضریب همبستگی

۱۶. تبدیل لوجیت کدام است؟

الف. $\frac{p(x)}{1-p(x)}$ ب. $\sqrt{\frac{p(x)}{1-p(x)}}$ ج. $\ln \frac{p(x)}{1-p(x)}$ د. $\frac{p(x)}{e^{1-p(x)}}$



نام درس: رگرسیون

تعداد سئوال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش آمار

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۲۵۰۲۱۸

تعداد کل صفحات: ۵

۲. وارون مور - پنروز را برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ بیابید.

۳. مدل خطی زیر را در نظر می‌گیریم: $Y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + E$ $E \sim N(0, \sigma^2)$

یافته‌های یک نمونه تصادفی، $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ با میانگین $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ در جدول زیر

داده شده‌اند. فرض خطی $H_0: a_3 = 3a_1 - 2a_2$ را با میزان $\alpha = 0.10$ بیازمایید $(f_{0.10}(1,1) = 39.864)$

y	x ₁	x ₂	x ₃
0	1	-1	0
1	0	0	1
-1	1	0	0
2	1	1	1

۴. فرض کنید یک مدل خطی به صورت زیر باشد.

۲. مدل خطی زیر را در نظر می‌گیریم. $E \sim N(0, \sigma^2)$ $y_1 = a_1 - a_2 = E_1 a_1 + a_2 + E_1 a_2 + a_3x_3 + E_1 a_3$

یافته‌های یک نمونه تصادفی، $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ با میانگین $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ در جدول زیر

داده شده‌اند. فرض خطی $H_0: a_3 = 2a_1 - 2a_2$ را با میزان $\alpha = 0.10$ بیازمایید $(f_{0.10}(1,1) = 39.864)$

الف. بر آورد یاب (a_1, a_2) و با استفاده از آن برآوردیاب $5a_1 - a_2$ را بیابید.

y	x ₁	x ₂	x ₃
0	1	-1	0
1	0	0	1
-1	1	0	0
2	1	1	1

ب. نشان دهید که $y_1 - 4y_3$ یک برآوردیاب ناریب برای $5a_1 - a_2$ است.

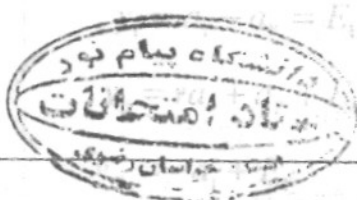
۵. فرض کنید (X, Y) دارای چگالی سه جمله ای زیر باشد.

$$f(x, y) = \frac{n!}{x! y! (n-x-y)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{n-x-y}$$

به طوری که X, Y اعداد صحیح غیر منفی بوده و داریم $X + Y \leq n$ و $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ تابع رگرسیونی

۴. فرض کنید یک مدل خطی به صورت زیر باشد.

۱ را روی X را پیدا کنید.



نام نمره: رگرسیون

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

کد نمره: ۲۵۰۲۱۸ تاریخ: ۸۶/۳/۱۹ شروع: ۸

www.egza.tk

تعداد سؤالات: فنی ۲۰ تکلیفی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تفسیر و تکلیفی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۴

ماشین حساب مجاز است:

۱. متغیرهای تصادفی X, Y دارای چگالی توام زیر می باشد.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{8} & (1,1), (1,2), (2,1), (2,3) \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$ برابر است با:

- الف. $\frac{8}{7}$ ب. $\frac{1}{7}$ ج. $\frac{1}{8}$ د. $\frac{7}{8}$

۲. گزینه نادرست کدام است

الف. $E(aY + b | X = x) = aE(Y | X = x) + b$

ب. $CoV(E(X | Y), Y) = coV(X, Y)$

ج. $var(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = \mu_X) = 0$

د. $Var(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = \mu_X) = 1$

۳. اگر میان Y, X رابطه خطی $aX + bY + c = 0$ برقرار باشد و $ab < 0$ باشد آنگاه:

- الف. $\rho = 1$ ب. $\rho = -1$ ج. $\rho = 0$ د. هیچکدام

۴. آزمون $\begin{cases} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{cases}$ مربوط به کدام گزینه می باشد.

الف. آزمون وابستگی Y, X ب. آزمون نا وابستگی Y, X ج. آزمون همبستگی Y, X د. آزمون استقلال Y, X

$$\mu_x = 1, \mu_y = 2$$

۵. با توجه به مقادیر زیر بهترین تابع پیش بینی کننده خطی کدام است؟
 $\sigma_x^2 = 1, \sigma_y^2 = 4, \rho = \frac{1}{2}$

- الف. $x + 1$ ب. $x - 1$ ج. $x + \frac{1}{2}$ د. $x - \frac{1}{2}$

۶. در سوال ۵، مقدار $E(\text{var}(Y | x))$ کدام است.

- الف. ۱ ب. -۱ ج. $\frac{1}{4}$ د. د صفر

۷. انتظار داریم برآورد کمترین مجموع توانهای دوم خطاها برای مدل $Y_i = a + bx_i + E_i$ تحت فرض $H_0: b = 0$ معادل کدام گزینه شود؟

- الف. SSE ب. SST ج. SSR د. هیچکدام



۸. در سؤال ۷ برآوردیاب نارایب σ^2 برابر است:

الف. $\frac{SST}{n-1}$ ب. $\frac{SST}{n-2}$ ج. $\frac{SSE}{n-1}$ د. $\frac{SSE}{n-2}$

۹. با توجه به مدل رگرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i$ گزینه نادرست کدام است؟

الف. $\sum_{i=1}^n \hat{E}_i = 0$ ب. $\sum_{i=1}^n x_i \hat{E}_i = 0$ ج. $\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \hat{E}_i = 0$ د. $\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \hat{E}_i = 1$

۱۰. داده های جدول زیر را در نظر بگیرید.

X	۹	۱۰	۱۳	۱۵	۱۸	۱۳
Y	۳۶	۴۴	۴۸	۶۳	۷۰	۴۵

فرض می‌کنیم $Y = bx + E$ بطوریکه $E \sim N(0, X\sigma^2)$ مقدار \hat{b} برابر است با:

الف. $5/25$ ب. $6/7$ ج. $3/92$ د. $4/6$

۱۱. در سؤال ۱۰ مقدار $\hat{\sigma}^2$ برابر است با:

الف. $1/39$ ب. $3/25$ ج. $3/92$ د. $2/7$

۱۲. دو بردار v, u را متعامد گوئیم هرگاه:

الف. $u'v = 0$ ب. $(\hat{u}, v) = \frac{\pi}{2}$ ج. $(\hat{u}, v) = \frac{\pi}{4}$ د. موارد الف و ب

۱۳. تصویر بردار $u = (1, 2, 1, 1)$ روی بردار $v = (1, 1, 1, 1)$ می‌باشد.

الف. $(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}})$ ب. $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$

ج. $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ د. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

۱۴. فرض کنید B, A دو ماتریس همیشه مثبت $n \times n$ باشند، گزینه نادرست کدام است.

الف. وارون A یعنی A^{-1} همیشه مثبت است ب. حاصلضرب AB همیشه مثبت است.

ج. برای هر عدد طبیعی k ، ماتریس A^k همیشه مثبت است. د. برای هر عدد حقیقی a, b ، $aA + bB$ همیشه مثبت است.

۱۵. متغیرهای تصادفی Y_1, Y_2, Y_3 با مشخصات زیر داریم

$\sigma_{Y_1 Y_2} = -1$ $\sigma_{Y_1 Y_3} = 1$ $\sigma_{Y_2 Y_3} = 0$

$\sigma_{Y_1}^2 = \sigma_{Y_2}^2 = \sigma_{Y_3}^2 = 1$

$\mu_{Y_1} = \mu_{Y_2} = \mu_{Y_3} = 2$

فرض کنید: $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 + y_3 + 1 \\ y_1 - y_2 - y_3 + 2 \end{pmatrix}$ $\sum_{ii} U$ برابر است با:

الف. $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



۱۶. در مدل خطی $Y = Xa + E$ که در آن $E \sim N(0, \sigma^2 I)$ باشد، ماتریس کواریانس برآورده (یا $\sum_{\hat{a}}$) برابر است با:

الف. $\sigma^2 (X'X)^{-1}$ ب. $\sigma^2 (X'X)$ ج. $\sigma^2 (X'X)^{-1} y$ د. هیچکدام

۱۷. در مدل خطی $Y = Xa + E$ ، با فرض اینکه $\sum_{E} = \sum_{y} = \sigma^2 I$ ، $E(E) = 0$ ،

زمانی که ماتریس X پر رتبه ستونی نباشد کدام گزینه نادرست است.

الف. برآوردیاب $\mu = Xa$ که بصورت تصویر Y روی فضای ستونی X است یکتا می باشد.

ب. برآوردیاب $\mu = Xa$ که بصورت تصویر Y روی فضای ستونی X است یکتا نمی باشد.

ج. ستونهای ماتریس X مستقل نمی باشند.

د. XX' وارون پذیر نمی باشد.

۱۸. در صورتیکه متغییر وابسته در یک تحلیل رگرسیونی مقادیر صفر و یک اختیار کنید، کدام تجزیه تحلیل رگرسیونی مناسب می باشد.

الف. رگرسیون خطی ساده ب. رگرسیون خطی چند گانه

ج. رگرسیون ستیفی د. رگرسیون لوجستیک

۱۹. با فرض اینکه $X_i, i = 1, \dots, 4, X_i \sim N(0, 1)$ ها مستقل باشند توزیع $\varphi = X_1 X_2 + X_3 X_4$ کدام است؟

الف. نمائی دوگانه است ب. X^2 ج. لاپلاس د. موارد الف و ج

۲۰. با فرض اینکه $\rho_{12} = \rho_{23} = 0$ و $\rho_{13} = 0.5$ مقدار ρ_{13} مقدار ρ_{13} برابر است با:

الف. صفر ب. ۱ ج. ۰.۱ د. هیچکدام

سئوالات تشریحی:

۱. مدل خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$Y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + E \quad E \sim N(0, \sigma^2)$$

یافته های یک نمونه تصادفی $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ ، میانگین $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)'$ در جدول زیر داده شده اند.

فرض خطی $H_0: a_3 = a_1 - a_2$ را با میزان $\alpha = 0.05$ با بیاز مایید. $F_{0.05}(1, 1) = 1.61$

Y	X ₁	X ₂	X ₃
0	1	-1	0
1	0	0	1
-1	1	0	0
2	1	1	0

۲. قضیه گاوس، مارکف را بیان کنید



۳. با استفاده از داده‌های زیر، با فرض $E \sim N(0, \sigma^2), y | x_1, x_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + E$ پارامتری a_1, a_2 و σ^2 را برآورد کنید.

x_{1i}	۱	۲	۲	۱	۳	۲	۱	۲	۳
x_{2i}	۲	۳	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۲
y_i	۱	۳	۱	۳	۳	۲	۱	۲	۳

۴. نشان دهید که در یک مدل خطی تحت فرض نرمال، $\hat{b}, Y_i - \hat{Y}_i$ مستقل می‌باشند.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x + 4y}{3} & 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

الف. تابع رگرسیون Y روی X را پیدا کنید.

ب. بهترین تابع رگرسیون خطی Y روی X را بیابید.

ج. پاسخهای الف و ب را باهم مقایسه کنید.

